

Numerieke Wiskunde: Wetenschap en Gereedschap

*Mijnheer de Rector Magnificus,
Zeer gewaardeerde toehoorders,*

Van Delft naar Leiden

$2\frac{1}{2}$ jaar geleden ben ik hier in Leiden benoemd. Mijn Leidse aanstelling heb ik nog enige tijd gecombineerd met mijn Delftse. Beide aanstellingen plus m'n aanstelling bij het Centrum Wiskunde & Informatica, het CWI in Amsterdam, gaven me een drukke tijd; één van de redenen waarom deze oratie wat lang op zich heeft laten wachten. De andere reden is dat één van m'n kinderen, hier aanwezig, langdurig voor studie in India verbleef.

In 2007 belde prof. Sjoerd Verduyn Lunel, toen wetenschappelijk directeur van het Mathematisch Instituut in Leiden, mij op met de vraag of ik belangstelling had om deeltijdhoogleraar Numerieke Wiskunde te worden op zijn instituut. Ik was toen deeltijdhoogleraar Numerieke Stroomingsleer bij de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek in Delft.

Ik vond het een prachtig aanbod. Maar alvorens te antwoorden heb ik het nog even besproken met prof. Jan Karel Lenstra, directeur van het CWI. Hij vond het aanbod ook mooi, maar zei dat volgens hem mijn hart in Delft lag. Ik ben een in Delft opgeleid vliegtuigbouwkundig ingenieur; echte ingenieursproblemen zijn een passie van me. Sinds het verdwijnen van vliegtuigfabriek Fokker echter ben ik instituten als het CWI en ook het Leidse Mathematisch Instituut wat ingenieurswerk betreft eigenlijk even goede plaatsen gaan vinden als de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek.

Ik hoefde niet lang na te denken over het Leidse aanbod. Hoogleraar Numerieke Wiskunde op een gerenommeerd wiskunde-instituut, aan een faculteit waar prof. Lorentz en prof. Oort nog hebben gewerkt, Einstein zelfs. Een universiteit trouwens ook waar veel aan ingenieurswiskunde is gedaan.

Ingenieurswiskunde in Leiden

Simon Stevin

De Universiteit Leiden heeft een lang ingenieursverleden; van 1600 tot 1843 heeft ze een ingenieursopleiding gehad.

De oprichting van de Leidse ingenieursschool valt in een periode waarin het Prins Maurits – dan de machtige man in Holland – militair voor de wind ging. Maurits was goed in het belegeren en innemen van steden. Hij pakte dit wetenschappelijk aan, daarbij geholpen door zijn persoonlijk adviseur Simon Stevin. Stevin, in Brugge geboren, vestigde zich in Leiden, kort na oprichting van de universiteit, en schreef zich er in als student, misschien om zijn netwerk op te bouwen en voor de belastingvoordelen. Hij was namelijk al een volleerd wetenschapper. Een jaar voor zijn inschrijving als student had hij al een belangrijk boek gepubliceerd, *Tafelen van Interest*, een boek over wat we nu financiële wiskunde zouden noemen. Meer boeken volgden, over uiteenlopende wiskundegebieden en andere onderwerpen.

Stevin was niet alleen veelzijdig wiskundige, maar ook nog ingenieur. Hij was uitvinder van bijvoorbeeld de zeilwagen en een nieuw type watermolen. De laatste bracht hij zelfs naar de markt; een vroeg voorbeeld van valorisatie.

Een kenmerk van Stevins werkwijze, zoals u wellicht weet, was zijn voorkeur voor Nederlands als taal om in te publiceren. Stevin wilde zodoende zo veel mogelijk mensen aanspreken voor de opbouw van de ingenieurswetenschappen, de opbouw van Holland in feite.

Bepalend voor Stevins succes was denk ik echter niet zijn fijne neus voor politiek en handel en ook niet zijn voorkeur voor de volkstaal, *maar* het principe om al zijn ingenieurswerk van een stevig theoretisch fundament te voorzien. Stevin vond dat als je een vak goed in de praktijk wilde kunnen uitoefenen, dat je dan eerst zo veel mogelijk theoretische kennis moest opbouwen. Simon Stevins zeilwagen en watermolen hebben misschien wel een steviger theoretisch fundament dan Wubbo Ockels'

superbus en laddermolen.

Daet sonder spieghelinge – in hedendaags Nederlands: praktijk zonder theorie – dat gaat niet volgens Stevin. Het omgekeerde gaat wel volgens hem; zonder praktisch inzicht kan men wel nuttig werk doen. Voor bijvoorbeeld zuiver wiskundigen geldt volgens Stevin: *‘Sy connen den Doenders stof leveren en voorderlick sijn, sonder self Doenders te wesen’*.

Maurits zag in dat ingenieurs van groot belang waren voor succesvolle beëindiging van de oorlog en opbouw van het land. Hij gaf de aanzet tot oprichting van de eerste ingenieursopleiding in Holland, hier aan de Universiteit Leiden. Op Maurits’ verzoek stelde Simon Stevin het onderwijsprogramma op.

Alle onderwijs zou, volgens Stevins plan, in het Nederlands worden gegeven. Stevin zelf werd evenwel geen docent aan de school; Maurits had hem te hard nodig.

De ingenieursschool leidde een stabiel en kleurrijk bestaan binnen de universiteit. In de Gouden Eeuw werd een les er als één van de vermakelijkheden van Holland beschouwd, getuige het volgende verslagje:

Metselaars, timmerluiden, en diergelijke meer, die men met hopen hier kan vinden, sonder mantels, maar met schootsvellen, wat seer kluchtig om te sien is.

Van Leiden naar Delft

De stabiliteit van de ingenieursschool hield aan tot de volgende buitenlandse soldaten zich aandienden, de Fransen (*linksonder in het raam rechts van mij*). In 1806 werd Lodewijk Napoleon koning van Holland. Naar Frans voorbeeld wilde hij in Holland een Ecole Polytechnique invoeren, een ingenieursopleiding voor de meest talentvolle studenten en docenten van het land. Er ontstond direct grote weerstand tegen dit plan onder verschillende groepen in de Nederlandse samenleving. Eén groep vond het gevaarlijk; de mooie structuur van de ingenieursschool binnen de universiteit zou verloren gaan. Een andere groep vond het te duur, en weer een andere te elitair, te on-Hollands. Koning Lodewijk

kreeg het niet voor elkaar; het plan ging de ijskast in.

In 1825, Lodewijk Napoleon was inmiddels weg, besloot de Universiteit Leiden om haar ruim twee eeuwen oude ingenieursschool om te zetten in het Industrie College. De Industriële Revolutie was inmiddels begonnen. De industrie ontwikkelde zich *echt* revolutionair; het Industrie College heeft namelijk nog geen 20 jaar bestaan. In 1843 werd ze al opgeheven, nadat een maand eerder in Delft de Koninklijke Akademie ter opleiding van burgerlijk ingenieurs – de huidige TU Delft – was opgericht. De oprichting van de TU Delft, in feite toch het plan van Koning Lodewijk, markeert het einde van bijna $2\frac{1}{2}$ eeuw ingenieursopleiding aan de Universiteit Leiden.

Ingenieurswiskunde is hier echter nooit helemaal weggegaan.

Toch nog in Leiden

In 1992 was ik in Amerika, op een conferentie over numerieke stromingsleer, een conferentie met veel ingenieurs onder de deelnemers. Op het programma stond al weken voor de conferentie prominent een sessie aangekondigd met als titel *Computational Fluid Dynamics in the Netherlands*. Het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium in Amsterdam, het NLR, een belangrijk instituut in Nederland op het gebied van numerieke stromingsleer, was niet betrokken bij de organisatie van de sessie en een beetje nerveus geworden van de aankondiging. Een leider van een onderzoeksafdeling van het NLR ging er speciaal voor naar de conferentie. Toen ik hem daar tegen kwam bleek hij serieus voorwerk te hebben gedaan. Zijn verrassende conclusie was dat het tot dan toe in Nederland verrichte numerieke stromingsleeronderzoek internationaal gezien best wel goed was, maar toch wel wat beter had gekund, *mits* werk dat hier in Leiden, in de jaren '60 en '70 van de vorige eeuw, was verricht niet werd meegeteld, werk van prof. Bram van Leer. De ingenieursopleiding was dan wel weg uit Leiden, wiskunde voor ingenieurs niet, zeker niet dat in de stromingsleer. Zelfs prof. Lorentz (*rechtsonder in het groepje van vijf hoofden in het raam rechts van mij, de man met de papierrol in zijn handen*) heeft nog belangrijk stromingsleerwerk gedaan,

ten behoeve van de afsluiting van de Zuiderzee. De aangekondigde sessie op de conferentie werd overigens niet gehouden; het bleek een grap te zijn.

Numerieke Wiskunde

Numerieke stromingsleer

Stromingsleer heeft een roemrijke geschiedenis. In mijn destijds in Delft gegeven oratie heb ik daar uitgebreid bij stil gestaan. Nu een korte versie:

Navier-Stokes-vergelijkingen. Een mijlpaal in de stromingsleer is de invoering van zogenaamde partiële differentiaalvergelijkingen voor het beschrijven van gas- en vloeistofstromingen, op basis van de Tweede Wet van Newton (kracht = massa \times versnelling).

Partiële differentiaalvergelijkingen zijn wiskundige formules waarmee het verloop van vele ingewikkelde processen in allerlei vakgebieden op heldere en uiterst compacte wijze kan worden beschreven.

De eerste partiële differentiaalvergelijkingen voor gas- en vloeistofstromingen werden $2\frac{1}{2}$ eeuw geleden ingevoerd door Leonard Euler. Euler is één van de knapste en meest productieve wiskundigen ooit. Dat een wiskundige de stromingsleer vooruit helpt zien we wel vaker. De stromingsleer heeft een grote rijkdom aan wiskundeproblemen.

Net als Stevin was Euler overigens ook uitvinder. Hij is de uitvinder van onder andere de schepsschroef. En net als Stevin had Euler ook een prima politiek en zakelijk inzicht. Zo legde hij als voorwaarde voor zijn terugkeer naar Sint Petersburg – hij had daar eerder gewerkt – een verlanglijstje neer bij tsarina Catharina II. Behalve een goed salaris wilde hij: gratis huisvesting, gratis brandstof voor in de winter, vrijwaring van inkwartiering van soldaten, geschikte posities voor zijn drie zonen, plus aanstelling van een bekwaam wetenschapper als vice-president van

de Academie van Wetenschappen in Sint Petersburg. Euler wilde wetenschappers op leidinggevende wetenschappelijke posities. Hier in Leiden en ook bij het CWI is dat zo geregeld, erg prettig, alleen al bij functioneringsgesprekken. Catharina II willigde Eulers eisen in, met uitzondering toch van de laatste eis. Als extraatje leende ze hem echter één van haar koks uit. Ook niet slecht.

De door Euler voorgestelde stromingsvergelijkingen waren nog niet geschikt voor de meeste praktische problemen; wrijvingskrachten waren er nog niet in opgenomen. De uitbreiding met deze krachten werd in de 19^e eeuw op elegante wijze verzorgd door de heren Navier en Stokes. Deze meer uitgebreide partiële differentiaalvergelijkingen staan nu bekend als de Navier-Stokes-vergelijkingen. We berekenen inmiddels allerlei stromingen met de Navier-Stokes-vergelijkingen; luchtstromingen om vliegtuigontwerpen bijvoorbeeld. Vliegtuigen waar we dan vervolgens gewoon instappen als ze gebouwd zijn, ofschoon we niet *echt* zeker weten of de bij het ontwerpen van die vliegtuigen met Navier-Stokes berekende luchtstromingen wel *echt* betrouwbaar zijn.

Als u nog een mooie geldprijs en eeuwige roem wilt verdienen: Het Clay Mathematics Institute in Amerika heeft in het jaar 2000 zeven prijzen van elk een miljoen dollar uitgelooft voor oplossing van een zevental openstaande wiskunde problemen. Eén van de zeven, het vermoeden van Poincaré, is inmiddels opgelost. Eén van de zes nog openstaande problemen betreft het leveren van een bewijs voor het bestaan van oplossingen van de Navier-Stokes-vergelijkingen. Stromingsleer is nog steeds een goudmijn voor wiskundigen.

Numerieke weersvoorspelling. Een alledaagse toepassing van de Navier-Stokes-vergelijkingen – die u allen kent – is weersvoorspelling. Voor de Tweede Wereldoorlog was weersvoorspelling meer een kunst dan een kunde. Elke dag werden weersgegevens van verschillende plaatsen verzameld. Deze gegevens werden op land- en zeekaarten uitgezet, waarna er lijnen van constante druk en temperatuur op deze kaarten werden getekend. Door vergelijking met oude druk- en temperatuurver-

delingen en bijbehorende, bekende weersverlopen werd vervolgens door een weerkundige een weersvoorspelling gedaan. De persoonlijke deskundigheid van deze weerkundige drukte een zwaar subjectief stempel op de weersvoorspelling. Wat wiskunde betreft werd slechts gebruik gemaakt van elementaire statistiek en wat eenvoudige interpolatie- en extrapolatiemethoden.

In een poging om tot een meer wetenschappelijk gefundeerde weersvoorspelling te komen had de Noor Vilhelm Bjerknes aan het begin van de 20^e eeuw het idee om het weer te voorspellen op basis van de Navier-Stokes-vergelijkingen.

Voor een weersvoorspelling wil je verdelingen weten in ruimte en tijd – de toekomst uiteraard – van luchtdruk, luchttemperatuur en windsnelheid. Deze verdelingen zitten diep in de Navier-Stokes-vergelijkingen verpakt; ze zijn er niet gemakkelijk uit op te lossen. Exacte oplossing van de Navier-Stokes-vergelijkingen is vandaag de dag nog steeds onmogelijk. Bjerknes kwam niet verder dan zijn idee, wel een belangrijk idee.

Het *bij benadering*, dus *niet exact* oplossen van de Navier-Stokes-vergelijkingen gaat *wel*. In het geval van weersvoorspelling kan dat bijvoorbeeld als volgt:

Demonstratie met houten model getoond tijdens oratie:

De atmosfeer om de gehele aarde verdelen we in denkbeeldige, tegen elkaar aan liggende open raamwerkjes zoals deze. Dit noemen we een cel. In totaal kunnen het miljoenen cellen zijn. Voor weersvoorspelling zijn de cellen duizenden malen groter dan deze en niet van hout, zoals deze, maar van wiskunde. Het drie-dimensionale bouwwerk van alle cellen, het rooster noemen we dat, zit denkbeeldig aan de aarde vastgeplakt; bij wind beweegt de atmosfeer door de cellen heen.

Voor het gemak nemen we nu aan dat op elk tijdstip de druk een constante waarde heeft per cel. *Per cel* kan de waarde van de druk anders zijn. Hetzelfde geldt voor temperatuur en windsnelheid. Deze celsgewijs constante aanpak is een voorbeeld van een numeriek-wiskundige benadering.

De benadering kan in principe willekeurig nauwkeurig worden gemaakt door met een fijner rooster te werken, met meer cellen dus. Echter, hoe meer cellen, hoe meer rekenwerk. We willen geen *weersnaspelling*.

Op basis van meetgegevens van het weer over de gehele aarde op een bepaald tijdstip kunnen we een beginoplossing voor onze numerieke weersvoorspelling definiëren: in elke cel de daar ter plaatse *gemeten* waarden van druk, temperatuur en windsnelheid. Voor cellen waar meetgegevens ontbreken moet de beginoplossing door interpolatie of extrapolatie worden aangemaakt.

Het rekenwerk kan nu beginnen. Met behulp van de Navier-Stokes-vergelijkingen kan nu eerst worden berekend hoeveel er op het begintijdstip elke cel in- of uitstroomt in termen van massa, impuls en energie. Met een numerieke tijdstapmethode kunnen vervolgens worden berekend: de druk, temperatuur en windsnelheid in alle cellen, op een tijd kort na het begintijdstip. Op dit nieuwe tijdstip aangekomen kunnen we weer opnieuw voor alle cellen het netto transport van massa, impuls en energie uitrekenen, en vervolgens weer een tijdstap maken, enzovoort.

We hebben hier in grote lijnen al een numeriek algoritme te pakken. We zagen: hoe fijner het netwerk van cellen, het rooster, hoe nauwkeuriger de ruimtelijke weergave van het weer. Hetzelfde geldt voor het verloop van het weer in de tijd; hoe kleiner de stap vooruit in de tijd, hoe nauwkeuriger de voorspellingen, maar ook hier: hoe meer rekenwerk tot we bij de gewenste eindtijd zijn. De hoeveelheid rekenwerk voor betrouwbare weersvoorspelling over een redelijk lange termijn is gigantisch.

De Brit Lewis Fry Richardson was de eerste die aan echte numerieke weersvoorspelling ging doen. Richardson deed een poging om het reeds voorbijgeen weer van 20 mei 1910 over een tijdsduur van 6 uur achteraf te voorspellen. Hij koos die dag omdat het een internationale ballonvaartdag was geweest, een dag waarvoor veel weersgegevens voor zijn beginoplossing beschikbaar waren. Richardsons numerieke weersvoorspelling werd een grote teleurstelling, in twee opzichten. De voorspelling was helemaal fout en kostte bovendien veel te veel tijd: zes weken hard rekenen voor zes uur ‘weersnaspelling’. Alle rekenwerk werd nog met de hand gedaan, in teamverband, dat wel. Bjerknes’ idee van numerieke

weersvoorspelling ging weer de mottenballen in, tot de Tweede Wereldoorlog.

Een goede weersvoorspelling is van groot militair-strategisch belang. In 1942, in Amerika, pakte de wiskundige John von Neumann de handschoen van numerieke weersvoorspelling weer op. Voor numerieke berekeningen waarin heel veel keer dezelfde soort sommen worden herhaald is stabiliteit, het niet buitensporig groeien van bijvoorbeeld afrondfoutjes, van groot belang. Von Neumann bedacht een goede methode voor het analyseren van de stabiliteit van numerieke methoden. De eerder door Richardson gebruikte numerieke methode voor weersvoorspelling bleek instabiel te zijn volgens Von Neumanns stabiliteitsanalyse, vandaar mogelijk ook het fout zijn van Richardsons resultaten. Von Neumann ging verder. Hij zag de ontwikkeling van een elektronische, digitale rekenmachine met interne programma-opslag als de manier om onder de te lange rekestijden uit te komen. Hij stortte zich ook op de ontwikkeling van zo'n machine, in al zijn facetten: van abstracte computerarchitectuur tot concrete invoer- en uitvoerapparatuur, en van algemene richtlijnen voor programmeren tot details over getallenrepresentatie. Von Neumann had veel succes met al dit werk. Numerieke weersvoorspelling, de manier van weersvoorspellen van vandaag de dag, werkt heel goed.

Numerieke wiskunde nu en in de toekomst

Met het werk van Von Neumann kwam ook numerieke wiskunde tot grote groei en bloei. Deze groei duurt tot op de dag van vandaag. Allerlei elegante en krachtige numerieke algoritmen werden en worden ontwikkeld. Numerieke wiskunde is een breed vakgebied geworden met allerlei specialismen daarbinnen. Het weer is slechts één van de vele gevallen waarvoor we tegenwoordig met behulp van numerieke wiskunde en computers gedetailleerde simulaties kunnen doen. De simulaties kunnen hun oorsprong hebben in allerlei vakgebieden, in de ingenieurswetenschappen, natuurkunde, scheikunde, sterrenkunde, biologie, medische wetenschappen, economie, noem maar op. Veel vakgebieden hebben vandaag de dag hun computersimulatie-versie. We hebben tegenwoordig computati-

onal physics, computational biology, computational finance, enzovoort. Computersimulatie is van groot belang voor de samenleving van vandaag en morgen. Het maakt de voorspelling mogelijk van van alles dat niet met echte experimenten kan worden onderzocht. Experimenten kunnen te gevaarlijk, te duur, onethisch of gewoonweg technisch onmogelijk zijn. Bovendien, in tegenstelling tot echte experimenten, maken computers ook ontwerp en optimalisatie mogelijk: invers rekenen. Gegeven de nog steeds bestaande groei in computersnelheden en -geheugens zijn de verwachtingen over de toekomst van computersimulatie nog steeds hooggestemd.

Alhoewel computersimulatie zich over veel vakgebieden heeft verspreid, moet het als een zelfstandig vak worden beschouwd, vanwege de specifieke deskundigheid die het vereist. Numerieke wiskunde vormt het hart van computersimulatie. Een uitdaging is om ervoor te zorgen dat numerieke algoritmen in staat zijn om optimaal te profiteren van de computers van vandaag en morgen. Met het toenemende realisme in computersimulatie, zijn robuustheid en efficiëntie twee steeds belangrijker wordende numeriek-wiskundige eigenschappen. Het is niet gewenst om als een baby-sit op een computersimulatie te moeten passen vanwege het gebruik van een niet-robuust numeriek algoritme. En het is ook niet de bedoeling om een snelle computer snel te vullen met een niet-efficiënt numeriek algoritme.

Bij het CWI ontwikkelen we volop nieuwe numerieke algoritmen, speciaal toegesneden op allerlei concrete toepassingen. Fundamenteel onderzoek in directe samenwerking met de praktijk, een spagaat die bij het CWI goed uitvoerbaar is. Ik ben niet de enige numeriek wiskundige bij het CWI; collega's Kees Oosterlee, Jason Frank, Willem Hundsdorfer en Jan Verwer zijn het ook, elk met hun eigen specialismen. Dat helpt.

Numerieke Wiskunde-Projecten

Eén toepassing van numerieke wiskunde waar ik me momenteel mee bezig

houdt betreft alternatieve energiebronnen.

Alternatieve energiebronnen

De mate van energiegebruik is evenredig met levensstandaard, en deze laatste neemt wereldwijd toe. Bovendien neemt de wereldbevolking toe. De grootte van de wereldbevolking heeft eeuwen lang ongeveer 1 miljard mensen bedragen. Mede door het grootschalige gebruik van fossiele brandstoffen is de wereldbevolking in de afgelopen twee eeuwen toegenomen van 1 naar 7 miljard, een gemiddelde, nu nog bestaande groeisnelheid van ongeveer 1 wereldburger per seconde.

Als energiebron gebruiken we nog steeds vooral fossiele brandstoffen: aardolie, aardgas en steenkool. Volgens energiespecialist Jeffrey Freidberg van MIT, die volgend jaar naar het Lorentz Center hier in Leiden komt, hebben we bij het huidige gebruik nog maar voor 20 jaar aardolie, als we aardolie als enige energiebron zouden gebruiken. Ook slechts voor 20 jaar aardgas. Steenkool hebben we gelukkig nog voor 200 jaar. Vraag is echter of het verstandig is om nog zo lang fossiele brandstoffen te gebruiken. Als we over 200 jaar of eerder geen alternatief hebben kunnen we hopelijk nog overstappen op paard-en-wagen en kaarslicht, maar het valt te betwijfelen dat dat zonder slag of stoot zal gaan.

Bij onderzoek aan alternatieve energiebronnen is de strategie van overheden om meerdere mogelijke bronnen te onderzoeken, een mix dus: zon, wind, nucleair, enzovoort. Het fijne van wiskunde in dit verband is dat het algemeen inzetbaar is; wiskunde sluit goed aan bij de strategie van een energiemix.

Van de vijf promovendi die ik op dit moment begeleid zijn er drie bezig met numeriek-wiskundig onderzoek gericht op alternatieve energiebronnen: Willem Haverkort en Bram van Es gecontroleerde kernfusie en Benjamin Sanderse windenergie, alles in volle harmonie.

Numerieke tokamak-plasmafysica

Het numerieke CWI-onderzoek aan gecontroleerde kernfusie wordt ge-

daan in het kader van een landelijk project voor 17 promovendi, gecoördineerd door het Nederlandse Instituut voor Plasmafysica, FOM-Rijnhuizen. Al het onderzoek in dit project is gericht op de in Frankrijk in aanbouw zijnde proefreactor ITER. ITER – Latijn voor tocht of weg – zal, als het goed gaat, 10 keer meer energie opbrengen dan er in gaat; 50 MW erin, 500 eruit. Naast Europa doen aan ITER onder andere ook mee: China, Japan, Rusland en de Verenigde Staten. Het is één van de grootste wetenschappelijke samenwerkingen ooit. De uitdagingen van ITER, technisch, natuurkundig maar ook wiskundig, zijn zeer groot.

Gecontroleerde kernfusie. Kernfusie, het vuur dat de mens nog niet beheerst, is de grote belofte van de energie-opwekking. Zodra gecontroleerde kernfusie werkt is het energievraagstuk mogelijk voorgoed opgelost, qua brandstofvoorraad, duurzaamheid, veiligheid, enzovoort.

Het idee van energie-opwekking door kernfusie en kernsplijting dateert van 1939. De eerste energie-opwekking door kernsplijting was er al in 1942. Drie jaar later dus. Energie-opwekking door kernfusie is er echter nog steeds niet. Het duurt zo lang omdat het zo moeilijk is. Maar er is in de loop der jaren al heel veel vooruitgang geboekt.

Kernfusie is de energiebron van de sterren, van onze zon. De energiebron van de zon is lang onbekend geweest. Het raadsel is pas in de jaren '20 van de vorige eeuw opgelost. De uitdaging bij gecontroleerde kernfusie is om de energiebron van de zon op aarde na te bootsen. Technisch is dat tot nu toe niet realistisch. De kernfusie zoals die in de zon, diep in het inwendige, optreedt – de proton-proton-reactie – wordt geholpen door de letterlijk astronomisch hoge dichtheid die daar heerst, door de enorme zwaartekracht van de zon. Op aarde moeten we het hebben van de relatief gemakkelijker deuterium-tritium-reactie. Die gaat als volgt.

Eerste demonstratie met ballonnen getoond tijdens oratie:

Men neme één deuterium-atoomkern en één tritium-atoomkern. Beide hebben dezelfde positieve lading en stoten elkaar dus af. Op hele kleine afstand komen er echter aantrekkende krachten in het spel die zeer veel

sterker zijn dan de afstotende krachten. Schieten we beide kernen met voldoende snelheid op elkaar af, dan overwinnen we de barrière van de afstotende krachten, de Coulomb-barrière, komen in het bereik van de sterk-aantrekkende kernkrachten en krijgen we kernfusie. De massa van de gefuseerde deeltjes is iets kleiner dan die van de oorspronkelijke, niet-gefuseerde deeltjes. Het analogon van het verschijnsel dat twee mensen die samenwonen minder spullen hebben dan wanneer ze apart wonen. Het verlies van massa is energie die vrijkomt, volgens $E = mc^2$. De energie die vrijkomt gaat vooral in het neutron zitten, dat er afvliegt, en ook een beetje in deze atoomkern, die van helium.

Gecontroleerde deuterium-tritium-fusie kan gerealiseerd worden door een mengsel van heel veel deuterium- en tritium-kernen te maken, met losse elektronen daar ook in. Zo'n soep van geladen deeltjes noemen we een plasma. Plasma is de vierde toestand waarin materie kan verkeren, naast de drie bekende toestanden: vast, vloeibaar en gasvormig. Neon-gas in een brandende TL-buis is in de plasmatoestand, lucht in een bliksem-schicht ook. CWI-collega Ute Ebert is specialiste op het gebied van dit soort plasma's.

De temperaturen in deze plasma's zijn naar menselijke maatstaven gemeten hoog, maar voor kernfusie zijn ze nog veel te laag. Kernfusie in een plasma van deuterium en tritium krijgen we als we de temperatuur en dichtheid van het plasma zeer hoog maken. De temperatuur moet zo'n 150 miljoen graden Celsius zijn. Hoge temperatuur betekent immers hoge snelheden van de atoomkernen. En hogere dichtheid betekent grotere kans op frontale botsingen en dus fusie. Als het kernfusieproces in het plasma eenmaal loopt kan het zichzelf aan de gang houden, als we maar voldoende deuterium- en tritiumkernen toevoeren.

Deuterium kan gemakkelijk uit water worden gewonnen. Tritium kan gemaakt worden, uit lithium, dat in gesteente zit. Water en gesteente hebben we in overvloed op aarde. De energieopbrengst uit beide stoffen is bovendien enorm; uit slechts twee liter water en een half pondje steen kan met kernfusie even veel energie worden gewonnen als uit verbranding van 1000 liter aardolie.

Het hete deuterium-tritium-plasma heeft een sterke neiging om uit dij- en af te koelen. Dat willen we niet; we willen geen verlaging van dichtheid en temperatuur; de zelflopende kernfusie zou daardoor stil kunnen vallen. Het hete plasma moet dus goed opgesloten blijven. Een probleem hierbij is dat opsluiten niet in materialen kan. Het plasma is daarvoor veel te heet. Een slim idee is om het plasma op te sluiten in een magneetveld, in een magnetische kooi als het ware. Dat kan in principe heel goed; het plasma bestaat immers uit elektrisch geladen deeltjes en geladen deeltjes bewegen zich langs magneetveldlijnen, als gordijnrollers langs gordijnrails. Door de magneetveldlijnen gesloten te nemen en de magneetveldsterkte voldoende groot, kunnen we het plasma opsluiten, niet helemaal echter en dat moet ook niet.

Tweede demonstratie met ballonnen getoond tijdens oratie:

De energie die namelijk vrijkomt bij de kernfusie van zojuist gaat dus vooral in het neutron zitten, dat er is afgevlogen. Het neutron kan niet worden opgesloten in het magneetveld. Het is immers ongeladen. Het neutron vliegt uit het magneetveld, uit het plasma en raakt daarbuiten zijn energie kwijt, uiteindelijk in de vorm van elektrische energie. De heliumkern geeft zijn energie zo veel mogelijk aan het plasma af en wordt daarna afgevoerd als verbrandingsproduct.

Tokamak-plasmafysica. Om de deuterium-tritium-fusie aan de gang te houden moet het warmtetransport vanuit het plasma naar buiten toe beperkt worden gehouden. De hiertoe optimale vorm van het plasma is de bolvorm; de vorm met de kleinste verhouding van buitenoppervlak en volume. Opsluiting van het plasma in een bolvormig magneetveld is echter helaas niet mogelijk, omdat een bolvormig magneetveld niet mogelijk is. Op grond van de harige-balstelling uit de meetkunde weten we dat een bolvormig magneetveld met gesloten veldlijnen tenminste één punt heeft waar magneetveldlijnen van verschillende sterkte elkaar snijden, en dat is onmogelijk.

Een vorm waarbij we bij wijze van spreken haren op de buitenkant

van deze vorm wel rondom kunnen kammen zonder dat er een kruin ontstaat is de torus, de vorm van de zwemband, de vorm ook van een aërodynamisch verschijnsel dat ik nu wil laten zien.

Demonstratie met ringwervels getoond tijdens oratie:

Deze mooie zaal heeft geen faciliteiten voor computersimulatie, dus kan ik als numericus nu eens fijn een echte proef gaan doen.

Kleine torusjes van lucht met rook daarin: ringwervels.

Opmerkelijk niet waar: een rechthoekig gat waar een ellipsvormige wervel uitkomt, die afwisselend ligt en staat, een afwisselend liggende en staande wervel, een slingering om de stabiele vorm die de ringwervel is. Torusvormige wervels – ringwervels – zijn zeer stabiele, zelforganiserende wervels.

Het deuterium-tritium-plasma kunnen we opsluiten in een torusvormig magneetveld. Opsluiting van het plasma in een torusvormig magneetveld is een Russische uitvinding. Er bestaan wat variaties op. De meest veelbelovende draagt de naam tokamak, een Russisch acroniem voor toroïdaal vat, gemagnetiseerd door spoelen. Het vat is een holle torus waarin het magneetveld komt met daarin het plasma. Het magneetveld wordt opgewekt met onder andere elektrische spoelen rondom het vat. Het magneetveld moet zodanig zijn dat het plasma stabiel in het vat komt te zweven, zonder de wand van het vat te raken. Het vat zou immers ernstig kunnen beschadigen bij aanraking door het extreem hete plasma.

Tussen de ringwervels die u zojuist zag en het plasma in een tokamak bestaat een prachtige wiskundige analogie. Beide laten zich, in een sterk vereenvoudigd model, door precies dezelfde partiële differentiaalvergelijking beschrijven. De analogie strekt zich helaas niet uit tot de stabiliteitseigenschappen. Zo stabiel van vorm als de ringwervel is, zo instabiel is het tokamak-plasma. Het tokamak-plasma wil op velerlei manieren van vorm veranderen. Een moeilijkheid is dat het magneetveld

ook gedeeltelijk wordt opgewekt door elektrische stromen *in* het plasma. Een directe wisselwerking dus tussen magneetveld en plasma. Deze wisselwerking kan wispelturig zijn. Deze zomer zag ik in filmopnamen gemaakt in een tokamak, hoe een stationair plasma plotseling begon te trillen, steeds woester ging trillen en uiteindelijk tegen de binnenwand van het vat sloeg, einde oefening, alles binnen een fractie van een seconde. Hoe groter het tokamak-plasma, hoe meer instabiliteiten. Dat is jammer, want grotere tokamaks zijn nu juist interessant vanwege hun kleinere verhouding van buitenoppervlak en volume; ITER is om deze reden veel groter dan z'n voorgangers. Voor de stabiliteit van het ITER-plasma belooft dat dus niet veel goeds. Voor onderzoekers, waaronder wiskundigen, echter weer wel, werk aan de winkel.

Een ander probleem voor tokamaks, maar eveneens werkgelegenheid voor onderzoekers, is turbulentie. Turbulentie, het wanordelijk door elkaar heen bewegen van wervels in stromingen, is fijn bij bijvoorbeeld het door koffie roeren van melk. U maakt met een lepeltje één korte beweging in uw kopje waardoor er een grote wervel in de koffie ontstaat. De grote wervel vervalt snel in vele, steeds kleinere en steeds chaotischer bewegende wervels. De vele kleine wervels zorgen voor een snelle menging van de melk door uw koffie; turbulentie als nuttig proces. In tokamak-plasma's treedt ook turbulentie op, ook daar met een verval van grote in kleine wervels en bijbehorende menging. In tokamaks is menging echter ongewenst; het hete plasma waarin de kernfusie optreedt, mag niet te veel mengen met koeler plasma; de kernfusie zou daardoor immers kunnen stilvallen.

Numerieke simulatie. Het gedrag van het tokamak-plasma kan in veel detail worden voorspeld met de Navier-Stokes-vergelijkingen, aangevuld met de Maxwell-vergelijkingen. De Maxwell-vergelijkingen zijn ook partiële differentiaalvergelijkingen. Ook de verzameling van Navier-Stokes-plus Maxwell-vergelijkingen is niet exact op te lossen. Ook hier moet het numeriek. Numerieke simulatie van het tokamak-plasma gaat op dezelfde wijze als bij weersvoorspelling: met opdeling van het tokamak-plasma in

heel veel cellen, met netto-transportberekeningen en met numerieke tijdstappen. Heel belangrijk bij het ontwikkelen van nieuwe numerieke methoden voor tokamak-plasma's is dat we zo goed mogelijk rekening houden met de specifieke eigenschappen van tokamak-plasma's, eigenschappen als het rijke golfkarakter en de veelschaligheid. Als een numerieke uitdaging bij dit onderzoek zie ik het verkrijgen van zo veel mogelijk relevante plasma-informatie uit zo weinig mogelijk cellen. Andere uitdagingen zijn automatische roosteraanpassing en nauwkeurige tijdstapmethoden. Het CWI is *de* plek voor het uitvoeren van dit numeriek-wiskundige onderzoek. De bestaande samenwerking met FOM-Rijnhuizen, met Hugo de Blank en prof. Hans Goedbloed, is hierbij zeer vruchtbaar.

Voor analytische wiskundigen is ook veel te doen aan tokamak-plasma's. Afgelopen maand juli was ik gasthoogleraar aan de Universiteit Nice. Er was daar een zomerschool georganiseerd op het gebied van wiskunde voor tokamak-plasma's. Te gast was daar ook Cédric Villani, die er sprak over zijn analytische onderzoek aan tokamak-plasma's, onderzoek waarvoor hij dit jaar een Fields Medaille heeft gewonnen, een wiskundeprijs vergelijkbaar met een gouden Olympische medaille. Algemeen geldt dat analytisch onderzoek een broodnodige kwalitatieve aanvulling vormt op kwantitatief numeriek onderzoek.

Bij het CWI zijn momenteel Willem Haverkort en Bram van Es als promovendi aan de slag met stabiliteitsonderzoek aan tokamak-plasma's, numeriek en analytisch. Er zal hierbij ook naar regeling van de stabiliteit van het plasma worden gekeken. Bij succes kan de regeling misschien wel in het echt worden gedaan, bij ITER.

Prof. Niek Lopes Cardozo, Nederlands kernfusiedeskundige, ziet onderzoek aan gecontroleerde kernfusie als het beklimmen van een berg, waarbij de top zal worden bereikt, niet door de klimmers van vandaag, maar door die van morgen. Ik denk dat het dankzij wiskunde best wel eens de huidige klimmers zouden kunnen zijn.

Numerieke windpark-aërodynamica

En mocht gecontroleerde kernfusie echt niet blijken te kunnen, dan is er

altijd nog de mogelijkheid van windenergie. Een windpark op de Noordzee, van 40 bij 40 km, optimaal volgeplant met grote windturbines, is voldoende groot om in de gehele Nederlandse energiebehoefte te voorzien, zo heb ik mij laten vertellen.

M'n promovendus Benjamin Sanderse is momenteel bij het CWI en het ECN een proefschrift aan het voorbereiden over de numerieke simulatie van windpark-aërodynamica, ook een toepassing met grote numeriek-wiskundige uitdagingen. Nauwkeurige en efficiënte numerieke simulatie van turbulentie is hier hoofdonderwerp. Samenwerking met prof Arthur Veldman en zijn groep is hierbij zeer nuttig.

Turbulentie is een berucht moeilijk onderwerp. Als variatie op wat Leidse ere-doctor Churchill ooit over een bepaalde politieke stroming heeft gezegd, heeft iemand eens over turbulentie gezegd: Als je als onderzoeker in de stromingsleer voor je 30^e niet aan turbulentie hebt gewerkt, dan heb je geen hart. Als je na je 30^e echter nog aan turbulentie werkt dan heb je geen verstand. Benjamin is nog geen 30. En veel senior-onderzoekers *voelen* zich nog geen 30. Onderzoek houdt je jong, onderwijs ook.

Ik zou u graag ook nog meer vertellen. De tijd ontbreekt mij helaas. En u wilt wellicht even de benen strekken en iets drinken.

Dankwoord

Geachte leden van het College van Bestuur, medewerkers van het Mathematisch Instituut, en alle anderen van de Universiteit Leiden die mijn benoeming mogelijk hebben gemaakt; ik dank u voor het in mij gestelde vertrouwen.

Hooggeleerde Piet Hemker, hooggeleerde Piet Wesseling; dank wederom voor de van jullie ontvangen scholing.

Collega's van het CWI, werkzaam in onderzoek of ondersteuning; dank

voor de uitstekende samenwerking en aangename werksfeer.

Beste collega's van de TU Delft; dank voor jullie aanwezigheid; we blijven samenwerken.

Meer nog dan m'n werk betekenen voor mij: Wijnie, onze kinderen, en m'n moeder. Dat houden we zo!

Dank aan u allen voor uw aandacht, ik heb gezegd.